

**Компонент ОПОП 01.03.02 Прикладная математика и информатика.
профиль Системное программирование и компьютерные технологии
К.М.01.06**

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

Дисциплины Функциональный анализ

Разработчик (и):

Беляев Владимир Яковлевич,
доцент кафедры высшей математики и
физики
канд. ф.-м. наук, доцент

Утверждено на заседании кафедры
Информационных технологий
протокол № 6 от 22.03.2024

Заведующий кафедрой ВМиФ

_____ В.В. Левитес

1. Критерии и средства оценивания компетенций и индикаторов их достижения, формируемых дисциплиной (модулем)

Код и наименование компетенции	Код и наименование индикатора(ов) достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине (модулю)			Оценочные средства текущего контроля	Оценочные средства промежуточной аттестации
		<i>Знать</i>	<i>Уметь</i>	<i>Владеть</i>		
ОПК-3: Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности	ОПК-3.1 Применяет математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности ОПК-3.3 Использует фундаментальные результаты математики при создании моделей в области профессиональных интересов	<ul style="list-style-type: none"> – основные понятия, определения и свойства объектов функционального анализа; – формулировки и доказательства утверждений, методы их доказательства, возможные сферы их связи и приложения в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания. 	<ul style="list-style-type: none"> – доказывать утверждения функционального анализа; применять полученные навыки в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания. 	<ul style="list-style-type: none"> – аппаратом функционального анализа; – методами доказательства утверждений; – навыками работы с объектами более высокого уровня абстракции по сравнению с конечномерным анализом. 	<ul style="list-style-type: none"> - комплект заданий для выполнения лабораторных работ; - тестовые задания; 	Результаты текущего контроля

2. Оценка уровня сформированности компетенций (индикаторов их достижения)

Показатели оценивания компетенций (индикаторов их достижения)	Шкала и критерии оценки уровня сформированности компетенций (индикаторов их достижения)			
	Ниже порогового («неудовлетворительно»)	Пороговый («удовлетворительно»)	Продвинутый («хорошо»)	Высокий («отлично»)
Полнота знаний	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.	Минимально допустимый уровень знаний. Допущены не грубые ошибки.	Уровень знаний в объёме, соответствующем программе подготовки. Допущены некоторые погрешности.	Уровень знаний в объёме, соответствующем программе подготовки.

<p>Наличие умений</p>	<p>При выполнении стандартных заданий не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки.</p>	<p>Продemonстрированы основные умения. Выполнены типовые задания с не грубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме (отсутствуют пояснения, неполные выводы)</p>	<p>Продemonстрированы все основные умения. Выполнены все основные задания с некоторыми погрешностями. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами.</p>	<p>Продemonстрированы все основные умения. Выполнены все основные и дополнительные задания без ошибок и погрешностей. Задания выполнены в полном объеме без недочетов.</p>
<p>Наличие навыков (владение опытом)</p>	<p>При выполнении стандартных заданий не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки.</p>	<p>Имеется минимальный набор навыков для выполнения стандартных заданий с некоторыми недочетами.</p>	<p>Продemonстрированы базовые навыки при выполнении стандартных заданий с некоторыми недочетами.</p>	<p>Продemonстрированы все основные умения. Выполнены все основные и дополнительные задания без ошибок и погрешностей. Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач.</p>
<p>Характеристика сформированности компетенции</p>	<p>Компетенции фактически не сформированы. Имеющихся знаний, умений, навыков недостаточно для решения практических (профессиональных) задач. ИЛИ Зачетное количество баллов не набрано согласно установленному диапазону</p>	<p>Сформированность компетенций соответствует минимальным требованиям. Имеющихся знаний, умений, навыков в целом достаточно для решения практических (профессиональных) задач. ИЛИ Набрано зачетное количество баллов согласно установленному диапазону</p>	<p>Сформированность компетенций в целом соответствует требованиям. Имеющихся знаний, умений, навыков достаточно для решения стандартных профессиональных задач. ИЛИ Набрано зачетное количество баллов согласно установленному диапазону</p>	<p>Сформированность компетенций полностью соответствует требованиям. Имеющихся знаний, умений, навыков в полной мере достаточно для решения сложных, в том числе нестандартных, профессиональных задач. ИЛИ Набрано зачетное количество баллов согласно установленному диапазону</p>

3. Критерии и шкала оценивания заданий текущего контроля

3.1. Критерии и шкала оценивания тестирования

Контрольное (экзаменационное) тестирование: балл рассчитывается пропорционально количеству верно решенных дидактически единиц (модулей):

Количество верно решенных ДЕ	0-5
Количество баллов	По 8 баллов за каждую ДЕ

1. Типовые контрольные задания и методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

Вариант 1

1. Счетное множество – это:

- Множество, элементы которого можно пересчитать.
- Конечное множество.
- Бесконечное множество.
- Множество, равномощное множеству натуральных чисел.

2. Какие из следующих пар множеств равномощны?

- Множество натуральных чисел и множество всех слов алфавита $\{a,b\}$.
- Множество натуральных чисел и множество всех подмножеств множества натуральных чисел.
- Множество вещественных чисел и множество всех подмножеств множества натуральных чисел.
- Множество вещественных чисел и множество всех подмножеств множества вещественных чисел.

3. Какие из следующих пар множеств равномощны?

- Множество точек на прямой и множество точек на плоскости.
- Множество точек на плоскости и множество точек в 3-х мерном пространстве.
- Множество вещественных чисел и множество всех функций вида $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, где \mathbf{R} - множество вещественных чисел.
- Множество вещественных чисел и множество всех открытых подмножеств множества вещественных чисел.

4. Какие из функций $\rho: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, где \mathbf{R} – множество вещественных чисел, являются метриками.

- $\rho(x,y) = |x| + |y|$
- $\rho(x,y) = |x| - |y|$
- $\rho(x,z) = x^2 + y^2$
- $\rho(x,z) \leq |x - y|$
- $\rho(x,z) \geq |x + y|$

5. Дана метрика $\rho: \mathbf{X} \times \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$. Какие из следующих подмножеств \mathbf{X} являются открытыми?

- \mathbf{X}
- \emptyset
- $\{x \in \mathbf{X} \mid \rho(x_0, x) \leq 1\}$ для фиксированного $x_0 \in \mathbf{X}$.
- $\{x \in \mathbf{X} \mid \rho(x_0, x) \geq 1\}$ для фиксированного $x_0 \in \mathbf{X}$.
- $\{x \in \mathbf{X} \mid \rho(x_0, x) > 1\}$ для фиксированного $x_0 \in \mathbf{X}$.

6. Дана метрика $\rho: \mathbf{X} \times \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$, последовательность $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{X}$ и $a \in \mathbf{X}$. Пусть $f_n \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда

а). Для любой окрестности точки a существует такое $k \in \mathbf{N}$, что все f_n при $n \geq k$ лежат в этой окрестности.

б). $\lim_{n \rightarrow \infty} \dot{\iota} f(n, a) = 0$.

в). $\lim_{n \rightarrow \infty} \dot{\iota} \rho(f_n, a \dot{\iota}) = 0$

7. $\langle \mathbf{X}, \rho \rangle$ - метрическое пространство. Какие из следующих высказываний справедливы:

а). Любая фундаментальная последовательность элементов из \mathbf{X} имеет предел.

б). Если \mathbf{X} – полное, то любая фундаментальная последовательность элементов из \mathbf{X} имеет предел.

в). Любая сходящаяся последовательность элементов из \mathbf{X} является фундаментальной.

8. $\langle \mathbf{X}, \rho \rangle$ - полное метрическое пространство, $f: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ – сжимающее отображение. Тогда:

а). f – имеет равно одну неподвижную точку.

б). f – имеет равно две неподвижные точки.

в). f – имеет не менее двух неподвижных точек.

9. Пусть \mathbf{V} – множество непрерывных функций вида $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$. Какие из следующих отображений $f \rightarrow \|f\|$ являются нормами:

а). $\|f\| = |f(a) + f(b)|$.

б). $\|f\| = \min_{x \in [a, b]} |f(x)|$.

в). $\|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$.

10. Какие из функций $\mathbf{V}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, где \mathbf{V} – множество непрерывных функций вида $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$, являются скалярными произведениями:

а). $(f, g) = f(a)g(a)$.

б). $(f, g) = \max_{x \in [a, b]} f(x)g(x)$.

в). $(f, g) = \int_x^b \dot{\iota} f(x)g(x) \vee dx$.

г). $(f, g) = \int_x^b f(x)g(x) dx$.

11. В пространстве $C_2[0, 1]$ найти скалярное произведение (f, g) , где $f(x) = x$, $g(x) = x^2$:

12. В пространстве \mathbf{I}_2 – всех суммируемых в квадрате последовательностей найти скалярное

произведение (x, y) , где $x = \{1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, 0, \dots\}$, $y = \{0, 1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, 0, \dots\}$:

13. В пространстве $C[0, 1]$ заданы функционалы. Какие из них линейны?

а). $F(f) = f(\frac{1}{2})$.

б). $F(f) = f(\frac{1}{2}) + 1$.

в). $F(f) = \int_0^1 x^2 f(x) dx$.

г). $F(f) = \int_0^1 x(f(x) + 1) dx$.

14. Найти предел последовательности $\sqrt{2}, \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \dots$.

15. Является ли отображение $f(x) = \sin x$ числовой прямой в себя сжимающим?

- a). Да.
- b). Нет.

16. В пространстве $C_2\left[-\frac{\square}{2}, \frac{\square}{2}\right]$ найти норму функции $f(x) = \sin x$.

17. В пространстве $C\left[-\frac{\square}{2}, \frac{\square}{2}\right]$ найти норму функции $f(x) = \sin x$.

18. В пространстве $C_2\left[-\frac{\square}{2}, \frac{\square}{2}\right]$ найти скалярное произведение $f(x) = \sin x$ и $g(x) = \cos x$.

Вариант 2

1. Какие из следующих пар множеств равномощны?

- a). Множество натуральных чисел и множество целых чисел.
- b). Множество натуральных чисел и множество рациональных чисел.
- c). Множество натуральных чисел и множество вещественных чисел.
- d). Множество рациональных и множество вещественных чисел.

2. Какие из следующих пар множеств равномощны?

- a). Множество всех последовательностей натуральных чисел и множество вещественных чисел.
- b). Множество натуральных чисел и множество всех конечных подмножеств множества натуральных чисел.
- c). Множество вещественных чисел и множество всех бесконечных подмножеств множества натуральных чисел.
- d). Множество вещественных чисел и множество всех функций вида $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, где \mathbb{N} - множество натуральных чисел.

3. Какие из следующих пар множеств равномощны?

- a). Множество непрерывных функций $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, где \mathbf{R} - множество вещественных чисел и множество точек на плоскости.
- b). Множество непрерывных функций $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, и множество всех функций $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, где \mathbf{R} - множество вещественных чисел.
- c). Множество возрастающих последовательностей вещественных чисел и множество всех монотонных последовательностей вещественных чисел.
- d). Множество всех подмножеств множества вещественных чисел и множество всех открытых подмножеств множества вещественных чисел.

4. Какие из функций $\rho: \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, где \mathbf{R} – множество вещественных чисел, являются метриками.

- a). $\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$
- b). $\rho(x, y) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$
- c). $\rho(x, z) = \min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$

5. Дана метрика $\rho: \mathbf{X} \times \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$. Какие из следующих подмножеств \mathbf{X} являются замкнутыми?

- a). \mathbf{X}
- b). \emptyset
- c). $\{x \in \mathbf{X} \mid \rho(x_0, x) \leq 1\}$ для фиксированного $x_0 \in \mathbf{X}$.
- d). $\{x \in \mathbf{X} \mid \rho(x_0, x) \geq 1\}$ для фиксированного $x_0 \in \mathbf{X}$.
- e). $\{x \in \mathbf{X} \mid \rho(x_0, x) > 1\}$ для фиксированного $x_0 \in \mathbf{X}$.

6. В метрическом пространстве $\langle \mathbf{X}, \rho \rangle$ функция $f: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ непрерывна. Тогда:

- a). Для любого открытого подмножества $U \subseteq \mathbf{X}$ прообраз $f^{-1}(U)$ – замкнутое множество.
- b). Для любого открытого подмножества $U \subseteq \mathbf{X}$ прообраз $f^{-1}(U)$ – открытое.
- c). Для любого замкнутого подмножества $U \subseteq \mathbf{X}$ прообраз $f^{-1}(U)$ – открытое.

7. $\langle X, \rho \rangle$ - полное метрическое пространство. $f: X \rightarrow X$ - функция. Тогда:

- Если f - сжимающее отображение, то f непрерывно.
- Если f - сжимающее отображение, то $\forall x, y \in X \ x \neq y \Rightarrow \rho(f(x), f(y)) < \rho(x, y)$.
- Если $\forall x, y \in X \ x \neq y \Rightarrow \rho(f(x), f(y)) < \rho(x, y)$, то f - сжимающее отображение.

8. Пусть V - нормированное векторное пространство с нормой $\|x\|$. Тогда:

- f - имеет метрику, определяемую как $\rho(x, y) = \|x + y\|$.
- f - имеет метрику, определяемую как $\rho(x, y) = \|x + y\|^2$.
- f - имеет метрику, определяемую как $\rho(x, y) = \|x - y\|$.
- f - имеет метрику, определяемую как $\rho(x, y) = \sqrt{\rho(x, y)^2 + \rho(y, y)^2}$.

9. Пусть V - множество непрерывных функций вида $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$. Какие из следующих отображений $f \rightarrow \|f\|$ являются нормами:

- $\|f\| = |f(a) + f(b)|$.
- $\|f\| = \min_{x \in [a, b]} |f(x)|$.
- $\|f\| = \sqrt{\int_a^b f(x)^2 dx}$.

10. Пусть V - множество всех последовательностей $\{x_1, x_2, \dots\}$, для которых ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ сходится.

Какие из функций $V^2 \rightarrow \mathbf{R}$ являются скалярными произведениями:

- $(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 + y_n^2$.
- $(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 y_n^2$.
- $(x, y) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 y_n^2}$.
- $(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$.

11. В пространстве $C_2[0, 1]$ найти скалярное произведение (f, g) , где $f(x) = 1 - x$, $g(x) = x$:

12. В пространстве l_2 - всех суммируемых в квадрате последовательностей задан линейный

функционал формулой $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{\sqrt{2^n}}$. Найти его норму $\|F\|$.

13. В пространстве $C[0, 1]$ задан линейный функционал формулой $F(f) = f(0) - f(1)$. Найти его норму $\|F\|$.

14. Можно ли уравнение $x = \sqrt[3]{x+2}$ решить методом последовательных приближений?

- Да.
- Нет.

15. Является ли отображение $f(x) = 0.9 \sin x$ числовой прямой в себя сжимающим?

- Да.
- Нет.

16. В пространстве $C_2\left[-\frac{\square}{2}, \frac{\square}{2}\right]$ найти норму функции $f(x) = \cos x$.

17. В пространстве $C\left[-\frac{\square}{2}, \frac{\square}{2}\right]$ найти норму функции $f(x) = \cos x$.

18. В пространстве $C_2\left[0, \frac{\square}{2}\right]$ найти скалярное произведение $f(x) = \sin x$ и $g(x) = \cos x$.

Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний (ключи)

Вариант №1		
Задание	Ответ	Время, мин
1	a)	5
2	a), b)	5
3	a), b), d)	5
4	a), d), f)	5
5	a), b), e)	5
6	a), c)	5
7	b), c)	5
8	a)	5
9	c)	5
10	d)	5
11	0.25	5
12	0	5
13	a), c)	5
14	$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$	5
15	b)	5
16	$\sqrt{\frac{\square}{2}}$	5
17	1	5
18	0	5

Вариант №2		
Задание	Ответ	Время, мин
1	a), b)	5
2	a), b), c), d)	5
3	a), c)	5
4	a), b)	5
5	a), b), c), d)	5
6	b)	5
7	a), b)	5
8	c)	5
9	c)	5
10	d)	5
11	$\frac{1}{6}$	5
12	1	5
13	2	5
14	a)	5
15	a)	5
16	$\sqrt{\frac{\square}{2}}$	5
17	1	5
18	0.5	5

Примерное время на выполнение заданий – 90 минут